

Kolokwium nr 2 z analizy matematycznej I.2

16 maja 2024, 14:15; czas pracy: 3:15

Każdą kartkę należy czytelnie podpisać.

Rozwiązanie różnych zadań należy umieścić na oddzielnych kartkach.

Nie wolno korzystać z książek, notatek z zajęć itp., pomocy innych osób, internetu (w tym programów do obliczeń symbolicznych). Nie wolno komunikować się z innymi uczestnikami kolokwium.

Zadania należy rozwiązywać samodzielnie.

Należy szczegółowo uzasadniać rozwiązania powołując się na odpowiednie twierdzenia, lematy, ...

Zadanie 1 (7 pkt.). Niech funkcje $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będą dane wzorem $f_n(x) = e^{-x^2} + \frac{n^\alpha x^3}{1 + nx^4}$.

Znaleźć wszystkie

- (a) $\alpha \in \mathbb{R}$, dla których istnieje funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będąca granicą punktową ciągu (f_n) ;
 - (b) $\alpha \in \mathbb{R}$, dla których zbieżność do funkcji f określonej w punkcie (a) jest jednostajna na $\mathbb{R}$.
-

Zadanie 2 (7 pkt.). Niech $f: (-1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie zadana wzorem

$$f(x) = \frac{(2-x)(1+x)e^{x^8} + 3}{(2-x)(1+x)}.$$

- (a) Znaleźć rozwinięcie funkcji f w nieskończony szereg Taylora w punkcie 0.
 - (b) Wyznaczyć zbiór wszystkich rzeczywistych punktów zbieżności tego szeregu potęgowego.
 - (c) Obliczyć $f^{(2024)}(0)$.
-

Zadanie 3 (7 pkt.). Znaleźć zbiór rzeczywistych punktów zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{4^{n-1}(2n+1)(2n-1)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

oraz znaleźć jego sumę (zapisać ją jako skończoną sumę funkcji elementarnych) we wszystkich punktach $x \in \mathbb{R}$, w których szereg potęgowy jest zbieżny.

Zadanie 4 (7 pkt.). (a) Wykazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\lfloor n/3 \rfloor} \frac{e^{-\sqrt{nx}}}{n}$ jest zbieżny dla każdego $x \in (0, \infty)$ i zadaje funkcję f klasy C^1 na $(0, \infty)$.

- (b) Czy f jest dwukrotnie różniczkowalna na całej półprostej $(0, \infty)$?
-

Zadanie 5 (7 pkt.). Niech $A = (-20, 24)$. Rozważmy ciąg funkcji $f_n: A \rightarrow \mathbb{R}$ o następujących właściwościach:

- (W1) dla każdego $n \in \mathbb{N}$ funkcja f_n jest ograniczona (każda funkcja z osobna);
- (W2) ciąg $\frac{f_n}{n}$ zbiega jednostajnie do 0 na zbiorze A .

Określmy funkcje $g_n: A \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem $g_n(x) = \frac{1}{n} \max\{f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_n(x)\}$, dla $x \in A$. Wykazać, że ciąg (g_n) zbiega jednostajnie do 0 na A .